Exercice 1 (3 points) :

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ les points A(2 , 1 , 0) et B(-4 , 1 , 0)

0,5 — 1) Montrer que : $x+y-z-3=0$ est une équation du plan (P) passant par le point A et de vecteur normal $\vec{u}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k}$

0,75 — 2) (S) désigne l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MB}=0$. Montrer que (S) est ka sphère de centre Ω(-1 , 1 , 0) et de rayon 3

0,5 — 3) a) Calculer la distance de Ω au plan (P), puis en déduire que (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C)

0,5 — b) Montrer que le centre de (C) est le point H(0 , 2 , -1)

0,75 — 4) Montrer que : $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+8\vec{k}$, puis en déduire l'aire du triangle OHB

Exercice 2 (3 points) :

I. On considère le nombre complexe : $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

0,5 — 1) Montrer que le module du nombre a est : $|a|=2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

0,25 — 2) Vérifier que : $a=2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

0,25 — 3) a) En linéarisant $\cos^2(\theta)$, où θ est un nombre réel, montrer que : $1+\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)$

0,5 — b) Montrer que : $a=4\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+4i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

(on rappelle que $\sin(2\theta)=2\cos\theta\sin\theta$)

0,5 — c) Montrer que : $4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$ est une forme trigonométrique et calculer a^4

II. On considère le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ les points A et Ω d'affixes respectives $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $\omega=\sqrt{2}$ et soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$

0,5 — 1) Montrer que l'affixe du point B, image de A par la rotation R, est $b=2i$

0,5 — 2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z-2i|=2$

Exercice 3 (3 points) :

Une urne U_1 contient 7 boules indiscernables au toucher : 4 rouges et 3 vertes

Une urne U_2 contient 5 boules indiscernables au toucher : 3 rouges et 2 vertes

2 — 1) On tire ai hasard et simultanément 3 boule de l'urne U_1

Soient les événements suivants : A : « Obtenir une boule rouge et deux boules vertes »

B : « Obtenir 3 boules de la même couleur »

Montrer que : $p(A)=\frac{12}{35}$ et $p(B)=\frac{1}{7}$

1 — 2) On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne U_1 puis une boule de l'urne U_2

Montrer que : $(C) = \frac{6}{35}$, où C est l'événement « Obtenir trois boules rouge »

Problème (11 points) :

I. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln(x))}$ et on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans n repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique : 2 cm

0,5 — 1) Montrer que : $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$

0,75 — 2) a) Déterminer : $\lim_{x \to e^+} f(x)$ et $\lim_{x \to e^-} f(x)$ puis interpréter les résultats obtenus

0,5 — b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire que (C_f) admet une asymptote en $+\infty$ que l'on précisera

0,5 — c) Montrer que : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, puis interpréter le résultat obtenu

0,75 — 3) a) Montrer que : $(\forall x \in D_f)$, $f'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2(1-\ln(x))^2}$

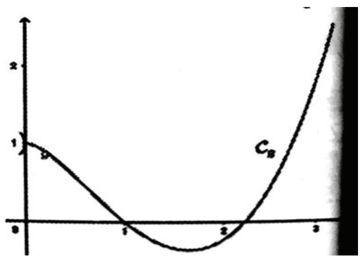
1 — b) Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$ et croissante $[1, e[$ et sur $]e, +\infty[$

0,25 — c) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

II. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$g(x) = 1 - x^2(1 - \ln(x))$ et (C_g) sa courbe représentative

Dans un repère orthonormé (voir la figure)



0,5 — 1) a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E): $g(x) = 0$ dans $]0, +\infty[$

0,5 — b) On donne me tableau de valeur suivants :

montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α tel que : $2{,}2 \le \alpha \le 2{,}3$

x	2,1	2,2	2,3	2,4
g(x)	-0,14	-0,02	0 ,12	0,28

0,25 — 2) a) Vérifier que : $(\forall x \in D_f)$, $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln(x))}$

0,5 — b) Montrer que la droite (Δ) d'équation y = x coupe la courbe (C_f) aux points d'abscisses : $x = 1$ et $x = \alpha$

0,5 — c) Déduire que la courbe (C_g) le signe de la fonction g sur $[1, \alpha]$ et montrer que : $\forall x \in [1, \alpha]$ $f(x) - x \le 0$

1,25 — 3) Tracer dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la droite (Δ) et la courbe (C_f)

0,75 — 4) a) Montrer que : $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x(1-n(x))} = \ln(2)$ (remarque que : $(\forall x \in D_f)$, $\frac{1}{x(1-\ln(x))} = \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln(x)}$)

0,75 — b) Calculer en cm² l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), la droite (Δ) et les droites d'équation : $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$

III. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

0,5 — 1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \le u_n \le \alpha$

0,5 — 2) Montrer que (u_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultats de la question II)2)c))

0,75 — 3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite